**Suites de matrices colonnes**

**Objectif**

Savoir exprimer C*n* en fonction de *n*.  
Étudier l'éventuelle convergence de (C*n*).  
Obtenir un état stable.

[Cours particuliers de Mathématiques niveau Lycée](https://www.livementor.com/cours-particuliers/Lycee/Mathematiques?widget=nov15&utm_source=http://www.cours.fr/)

**1. Suites du type Cn+1 = A × Cn**

Soit *N* un entier naturel non nul. *A* est une matrice carrée d'ordre *N*, *Cn* est une matrice colonne à *N* lignes vérifiant : C*n*+1 = A × C*n*.

a. Expression de Cn en fonction de n

Pour tout entier naturel *n*, on a ***Cn* = *An* *× C*0**.

**Preuve :**  
On pourra effectuer une récurrence en prenant pour propriété « à l'étape *n*, *Cn* = *An* × *C*0 » et en utilisant le fait que *Cn*+1 = *A* × *Cn*.

b. Convergence de Cn

On dira que la suite (*Cn*) **converge vers une matrice** ***L*** si et seulement si **tous les coefficients** de (*Cn*) **convergent vers les coefficients de** ***L*** qui correspondent.

***Exemple :*** Si http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460057/img/4/6/4/9/464974.gif, alors(Cn) converge vers http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460057/img/4/6/4/9/464976.gif

Si (*Cn*) converge vers *L*, on a alors *L* = *AL*. On dit que *L* est l'**état stable**.

**2. Suites du type Cn+1 = A × Cn + B**

Soit *N* un entier naturel non nul. *A* est une matrice carrée d'ordre *N*, *Cn* et *B* sont des matrices colonnes à *N* lignes vérifiant : *Cn*+1 = *A* × C*n* + *B*.

a. Expression de Cn en fonction de n

L'**état stable** est une matrice colonne à *N* lignes que l'on appelle ***S*** et qui est **constant** et qui vérifie ***S* = *AS* + *B***.

On en déduit la propriété suivante :

Si **I – A** est inversible, alors il existe un **état stable** S défini par **(I** **– A)-1 B**.

***Exemple :***Cn+1 = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460057/img/4/6/4/9/464978.gifCn + http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460057/img/4/6/4/9/464980.gif.  
La matrice I - A = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460057/img/4/6/4/9/464982.gifest inversible, d'inverse http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460057/img/4/6/4/9/464984.gif. Il existe donc un  état stable S = http://api.cours.fr/v1/api/corpus/data/mtabswf/opd/460057/img/4/6/4/9/464986.gif.

b. Convergence de Cn

Si (*Cn*) admet un état stable *S*, on a alors : ***Cn* = *An* (C0 – *S*) +** ***S***.

**Preuve :**  
On sait que : *Cn*+1 = *A* × C*n* + B et que *S* = *A* × *S* + *B*, en soustrayant membre à membre ces deux égalités matricielles, on obtient : *Cn*+1– *S* = *A* (*Cn* – *S*).  
En posant *Un* = *Cn* – *S*, on obtient une suite (*Un*) vérifiant *Un*+1 = *A* × *Un* et *U*0 = (*C*0 – *S*).  
On applique donc les résultats du premier paragraphe : pour tout entier naturel *n*, *Un* = *An ×* *U*0, c'est-à-dire : *Cn* – *S* = *An* (*C*0 – *S*) d'où *Cn* = *An* (*C*0 – *S*) + *S*.

**L'essentiel**

La suite *Cn*+1 = *A* × *Cn* peut s'exprimer en fonction de *n* : ***Cn* = *An* × *C*0**.  
Si les coefficients de *Cn* convergent vers les coefficients correspondants de la matrice *L*, alors *L* est **l'état stable** de *Cn* et ***L*** **=** ***A × L***.  
  
L'état stable *S* de la suite *Cn*+1 = *A* × *Cn* + B est une matrice colonne qui vérifie ***S*** **= *AS* +** ***B***, et si ***I*** **– *A* est inversible**, ***S*** **= (*I* – *A*)-1** ***B***.  
Si la suite admet un état stable, elle s'exprime en fonction de *n* : ***Cn* = *An* (*C*0 – *S*) +** ***S***.